



Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht

06

Jahrgang 62

September 2009 · € 7,85

Fortbildung und Kooperation

Paradoxe Evolution

Der Allee-Effekt

Differenzialrechnung am Parabolspiegel

Was kosten Ferienhäuser?

Lineare Gleichungen üben

GPS-Navigation

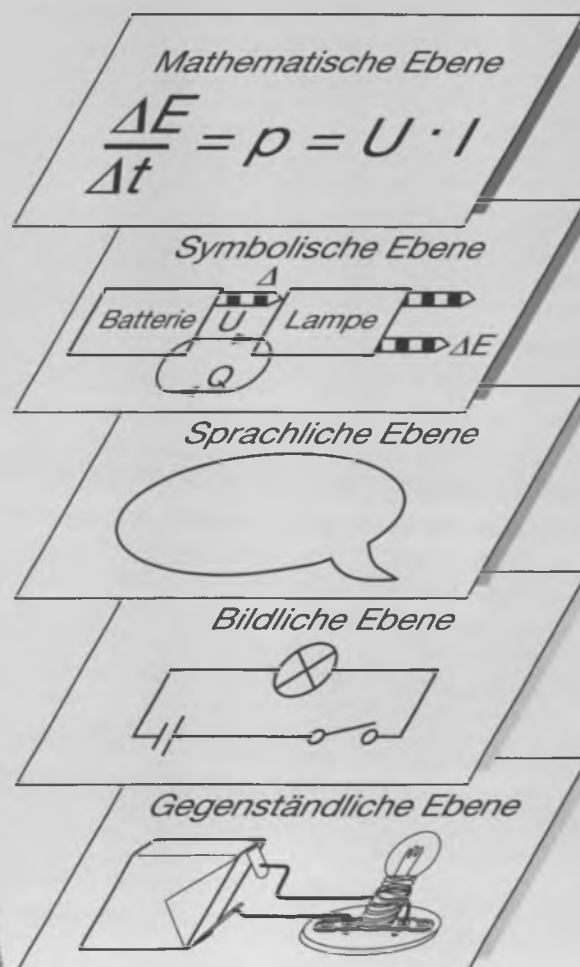
Die optische Scheibe

Klein – kleiner – winzig

Die Aspirin-Rose

Concept-Cartoons

Unterricht à la carte



Physikalische Darstellungsformen

Was kosten Ferienhäuser?

REINHARD OLDENBURG

Die Mietpreise von Ferienhäusern, aber auch von Wohnungen und Häusern, entstehen am freien Markt. Trotzdem lassen sich die Ergebnisse aus relativ wenigen Grunddaten ziemlich genau berechnen.

1 Einleitung

Empirische Forschung besteht wesentlich darin, dass Daten erhoben werden und dass aus diesen Daten Modelle entwickelt werden, die wiederum geeignet sind, Daten vorherzusagen und Erklärungen zu geben. Diese Prozesse können sehr komplex werden, so dass sie sich in der Schule nicht mehr abbilden lassen. Anhand der hier diskutierten Fragestellung können Schüler aber alle wesentlichen Schritte selbst ausführen.

Das gewählte Thema sind die Mietpreise von Ferienhäusern. Die Idee, diese Frage zu untersuchen kam mir, als mein Sohn einen Ferienhauskatalog studierte und immer wieder fragte, warum dieses oder jenes Haus so teuer sei. War Willkür der Besitzer oder des Maklers am Werke? Meist findet man eine tendenzielle Erklärung, und so kann die weitergehende Frage entstehen, ob der Mietpreis gar aus den Hausdaten berechnet werden kann.

Der weitere Aufsatz beschreibt Phasen, wie sie so auch im Unterricht durchlaufen werden können.

2 Das Problem

Als erstes sollte die Lehrkraft ein Thema genau fixieren. Soll es um Mietpreise von Wohnungen am Ort der Schule, um Hauspreise oder um Ferienhäuser gehen? Die Unterrichtsreihe ist zu all diesen Fragen durchführbar, weil man z. B. auf den Immobilienportalen im Internet, wie Immonet, Immoscout oder Immowelt, dazu ausreichend Datenmaterial finden kann. Es ist aber besonders praktisch, Ferienhauskataloge zu untersuchen, weil diese die Daten in einer schön geordneten Darstellung anbieten und erst einmal einen »blätternden« Einstieg erlauben. Für das weitere Vorgehen werden konkret Preise von Ferienhäusern auf Südbornholm in der Hochsaison gewählt.

3 Problemanalyse

Was macht ein Haus teuer? Aus dem Katalogstudium können die Schüler eine Liste von wichtigen Eigenschaften erstellen, z. B.: Zahl der Betten, Fläche des Wohnraums, Fläche des Grundstücks, Entfernung zum Meer, Pool, Erlaubnis für Hunde.

Diese Daten sammelt man in einer Tabellenkalkulation. Nachdem ein Format festgelegt ist, kann jede Schülergruppe einen Abschnitt des Katalogs eingeben und dann werden die Daten zu einer großen Datei zusammen geführt. Tabelle 1 zeigt den Anfang der Tabelle für das gegebene Beispiel.

4 Modellierung

Jetzt kann es an die Analyse gehen. Dazu werden verschiedene Modelle entworfen und verglichen.

Erstes Modell: Könnte es sein, dass der Preis im Wesentlichen nur davon abhängt, wie viele Quadratmeter Wohnfläche das Haus bietet? Nach Inspektion der Daten könnte man z. B. eine Regel »Mietpreis = 12 · Wohnfläche« vermuten. Mit der Tabellenkalkulation kann man diese Formel schnell ausprobieren und die Ergebnisse mit den tatsächlichen Mietpreisen vergleichen. Die Ergebnisse sind schon ganz gut, aber ist der Faktor 12 optimal gewählt? Sollten nicht auch die anderen Eigenschaften herangezogen werden? Wie wäre es etwa mit der Formel »Mietpreis = 200 · Personenzahl«? Hier können die Schüler vergleichen und Modelle vorschlagen. Zur Kommunikation der Modelle ist es praktisch, die Wortvariablen durch Buchstabenvariablen zu ersetzen:

Mietpreis: M

Zahl der Betten gleich Personenanzahl: B

Wohnfläche in m^2 : W

Entfernung zum Meer in m : E

Pool: P

Hund erlaubt: H

Damit sind die bisher diskutierten Formeln kompakt notierbar als

$$M = 12W \text{ bzw. } M = 200B.$$

Man sollte die Schüler etwas länger mit der Frage beschäftigen, ob und wie man mehrere Größen berücksichtigen kann. Ziel sollten Formeln wie etwa

$$M = 50B + 8W$$

sein. Dabei zeigt es sich auch, wie praktisch es ist, die Existenz eines Pools durch 0 bzw. 1 darzustellen:

$$M = 10W + 100P.$$

Weitere wichtige Fragen sind hier, wie man mit Größen umgeht, die einen negativen Einfluss auf den Mietpreis haben. Offensichtlich sind Häuser nahe am Meer teurer. Das kann durch Subtraktion oder Division modelliert werden.

Personen-Anzahl	Wfl	Meerentfernung	Pool	Hunde erl.	Preis
6	65	300	0	0	720
4	57	600	0	0	734
8	127	400	1	0	1505
5	56	600	0	1	705
8	114	100	1	0	1412
6	70	200	0	0	864
5	90	200	0	1	1046

Tab. 1. Preise von Ferienhäusern auf Südbornholm

5 Parametersuche

Bis hierhin wurden die Parameter nach Gefühl eingesetzt und ggf. modifiziert. Wie kann man systematisch zu optimalen Werten kommen?

Als erstes braucht man ein Maß für die Güte der Vorhersage. Der Lehrer kann mitteilen, dass ein solches die Summe der quadrierten Abweichungen ist. Mit einer weiteren Spalte in der Tabellenkalkulation lassen sich die quadratischen Fehler leicht berechnen:

(Preis – berechneter Preis)²

und summieren. Dieser Wert kann dann durch systematisches Verändern an den Parametern möglichst klein gemacht werden. Das ist mühsam und kann vom Computer übernommen werden: Das Excel-AddIn »Solver«¹ erlaubt das. Hier wird die Verwendung erklärt anhand der Formel:

$$M = aB + bW + cM + dP + eH + f. \quad (1)$$

Die Parameter a, b, c, d, e, f stehen z. B. in den Zellen L2 bis L7. Dort trägt man halbwegs plausible Startwerte ein. Die Formel zur Berechnung des vom Modell vorhergesagten Mietpreises in der 12.ten Tabellenzeile lautet:

$$=A12*L\$2+B12*L\$3+C12*L\$4+D12*L\$5+E12*L\$6+L\$7.$$

Im Menüfenster des Solvers muss man dann die zu optimierende Zelle angeben (hier diejenige, in der die Summe der Fehlerquadrate steht), Minimierung (statt Maximierung) wählen und angeben, dass der Zellenbereich L2 : L7 verändert werden darf. Dies liefert einem ganz schnell die zum jeweiligen Modell passenden optimalen Parameterwerte. Damit wird den Schülern viel Arbeit abgenommen, aber es bleibt immer noch viel zu bedenken.

6 Modellvergleich

Welche Modelle beschreiben am besten, wie der Markt den Mietpreis eines Hauses bewertet? Dazu vergleicht man verschiedene Modelle. Ein gutes Modell sollte eine möglichst geringe Fehlersumme produzieren, es sollte aber auch einfach sein und die Struktur sollte sich erklären lassen. Das durch die Gleichung (1) beschriebene Modell erfüllt diese Bedingung.

Man kann es aber noch verbessern. Dazu schaut man sich die Ferienhäuser an, bei denen es große Fehler produziert. Es zeigt sich, dass vor allem große Ferienhäuser überschätzt werden. Man kann diese Beobachtung nutzen, um das Modell zu verbessern. Man wendet auf die Wohnfläche eine Funktion an, deren Steigung immer kleiner wird, z. B. die Wurfelfunktion:

$$M = aB + b\sqrt{W} + cM + dP + eH + f. \quad (2)$$

Dies reduziert das Fehlerquadrat deutlich und mit den Daten von ca. 25 Bornholmer Ferienhäuser findet man

$$a = 36,5, b = 107,2, c = -0,035,$$

$$d = 256, e = 36,9, f = -293.$$

Was bedeuten diese Zahlen? So gibt Wert von d an, wie viel man für einen Pool bei sonst gleicher Ausstattung zusätzlich ausgeben muss. Eine interessante Information z. B. für die Besitzer von Ferienhäusern, die sich überlegen, ob sie ihre Immobilie damit aufwerten wollen. Einen Hund mitbringen zu dürfen, ist dagegen mit knapp 37 € wesentlich preiswerter. Mit wachsender Entfernung vom Meer werden die Häuser billiger, aber nur recht langsam. Das mag daran liegen, dass in der Stichprobe kein Haus weiter als 1000 m vom Strand entfernt lag. Die Grenzen des Modells lassen sich auch leicht aufzeigen: Bei einem Haus für eine Person mit 4 m² Wohnfläche ohne Pool und Hundeerlaubnis direkt am Meer bekäme man ca. 42 € die Woche zusätzlich ausgezahlt – unbequem, aber ein echtes Schnäppchen! Trotz dieser Grenzen ist die Formel richtig gut: Die prozentualen Fehler, die sie produziert, liegen im Mittel um 5 %.

Ein vergleichbar gutes Modell ist übrigens

$$M = B^a W^b M^c + dP + eH.$$

Finden Sie oder Ihre Schüler noch ein besseres Modell?

Die Modellbildung klärt nicht nur auf, welche Faktoren den Preis eines Ferienhauses wie stark bestimmen, sie hat auch praktische Nutzen: Ferienhäuser, die deutlich unter dem berechneten Preis angeboten werden, können als preiswert gelten, sofern sie nicht Nachteile haben, die hier nicht abgebildet wurden (beispielsweise wurden Baujahr bzw. letztes Renovierungsjahr nicht erhoben, weil sie in den Katalogen nicht bei allen Häusern angegeben werden). Trotzdem findet man so Kandidaten für besonders günstige Angebote.

7 Fazit

Auf den ersten Blick nützen solche Aktivitäten nur denen, die tatsächlich ein Ferienhaus buchen wollen, und das sind, schon wegen der Kosten, nur Wenige. Aber das Beispiel kann exemplarisch aufzeigen, wie empirische Forschung arbeitet. Was zum professionellen Niveau fehlt, sind vor allem die Überlegungen zur Genauigkeit der erzielten Ergebnisse. Beispielsweise kann man mit den Techniken, die hier vorgestellt wurden, keine Konfidenzintervalle für die Parameter angeben.

Prof. Dr. REINHARD OLDENBURG, oldenburg@math.uni-frankfurt.de, Institut für Didaktik der Mathematik und Informatik, Senckenberganlage 9, 60325 Frankfurt, war Lehrer für Mathematik, Physik und Informatik an einem Gymnasium in Göttingen bevor er in die Lehrerbildung wechselte, wo er sich besonders mit dem realitätsorientierten Unterricht mit Computernutzung beschäftigt.

¹ Lieferumfang, muss aber nachinstalliert werden